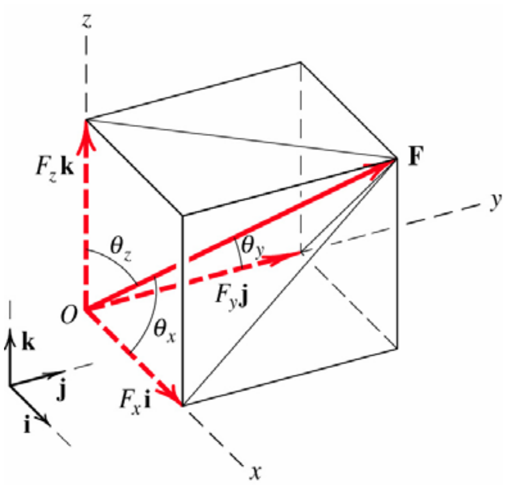
สถิตยศาสตร์ (Statics)

บทที่ 2 ระบบของแรง (ตอนที่ 3)

ระบบของแรงในสามมิติ

2/7 ระบบพิกัดฉาก

ปัญหาในทางกลศาสตร์หลายๆ ปัญหา ต้องพิจารณาในสามมิติ ระบบพิกัดพื้นฐานที่ใช้ในการพิจารณาคือระบบพิกัดฉาก (*x-y-z*) ดังนั้นแรง $\vec{F}$ ในสามมิติจะสามารถแตกออกได้เป็นแรง F_x, F_y และ F_z ตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 การแตกแรงในระบบพิกัดฉาก

ขนาดของแรง แรง F_x, F_y และ F_z สามารถคำนวณได้ตามสมการต่อไปนี้

$$F_x = F\cos(\theta_x) \qquad F_y = F\cos(\theta_y) \qquad F_z = F\cos(\theta_z) \tag{1}$$

โดย θ_x , θ_y และ θ_z คือมุมที่แรง $\vec{F}$ กระทำกับแกน x, y และ z ดังแสดงในรูปที่ 1

ขนาดของแรงรวม จะหาได้จากสมการที่ (2)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{2}$$

นอกจากนี้แรง $\vec{F}$ ยังสามารถเขียนได้ในรูปของผลบวกเวคเตอร์ของแรงย่อยในแนวแกน x, y และ z ได้ดังนี้

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \tag{3}$$

$$\vec{F} = F(\cos\theta_x\hat{i} + \cos\theta_y\hat{j} + \cos\theta_z\hat{k}) \tag{4}$$

โดย $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x, y และ z

กำหนดให้ $l = \cos\theta_x$, $m = \cos\theta_y$ และ $n = \cos\theta_z$ และเรียก l, m, n ว่า *ไดเรกชั่นโคไซน์ (Direction Cosine)* โดยไดเรกชั่นโคไซน์จะมีคุณสมบัติดังแสดงในสมการ (5)

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \tag{5}$$

แทนค่า l, m, n ลงในสมการ (4) จะได้

$$\vec{F} = F(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) \tag{6}$$

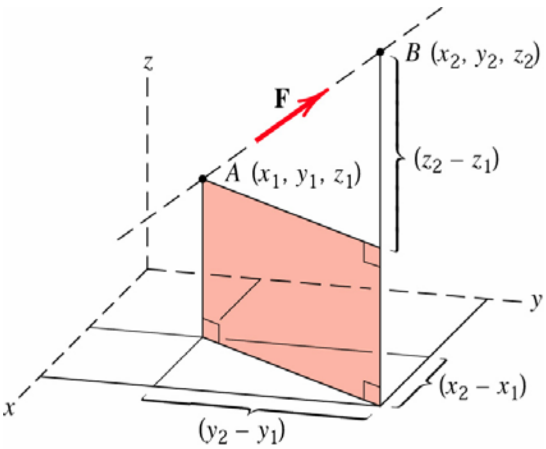
จากคุณสมบัติแสดงในสมการ (5) จะได้ว่าเวคเตอร์ $(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k})$ มีขนาด 1 หน่วย ดังนั้น สมการ (6) จะสามารถเขียนได้ในรูปของขนาดของแรง F คูณด้วยเวคเตอร์ 1 หน่วยในทิศทางเดียวกับแรง $\vec{F}$, $\hat{n}_F$ ดังนี้

$$\vec{F} = F\hat{n}_F \tag{7}$$

สมการ (7) แสดงให้เห็นว่าเวคเตอร์ใดๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ ขนาดของแรง คูณกับทิศทางของแรงซึ่งแสดงให้เห็นโดยเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}_F$ ได้

โดยทั่วไปการเขียนเวคเตอร์ $\vec{F}$ ให้อยู่ในระบบแกนพิกัดฉาก จะสามารถแบ่งวิธีเขียนตามเงื่อนไขที่กำหนดมาให้ได้ 2 กรณี คือ 1) การเขียนเวคเตอร์ $\vec{F}$ ในกรณีที่กำหนดจุด 2 จุดที่เวคเตอร์ผ่าน และ 2) การเขียนเวคเตอร์ $\vec{F}$ เมื่อกำหนดมุม 2 มุม

1. <u>กรณีกำหนดจุด 2 จุดที่เวคเตอร์ผ่าน</u>



รูปที่ 2 การหาเวคเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งผ่านจุด 2 จุดที่กำหนด

จากรูปเวคเตอร์ $\vec{F}$ มีขนาด F และมีทิศทางที่ผ่านจุด A และจุด B
จะสามารถเขียนเวคเตอร์ $\vec{F}$ ในรูปของขนาดแรงคูณกับเวคเตอร์หนึ่งหน่วยบอกทิศทาง ดังแสดงในสมการ (8) ได้ดังนี้

$$\vec{F} = F\hat{n}_F = F\frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|} \tag{8}$$

โดย $\vec{r}_{AB}$ คือเวคเตอร์ที่ชี้จากจุด A ไปยังจุด B และ

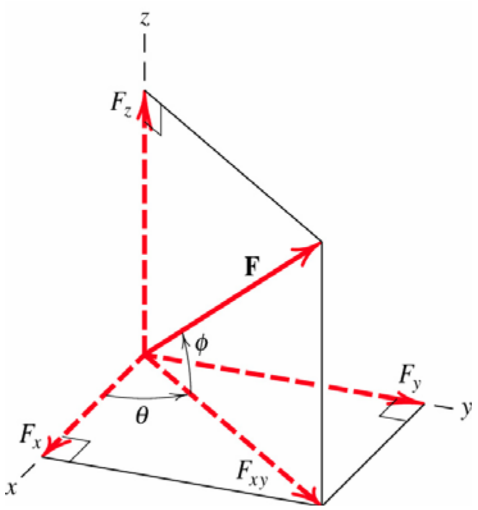
$$\vec{r}_{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \tag{9}$$

ดังนั้น

$$\vec{F} = F\frac{(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \tag{10}$$

จากสมการ (10) ถ้าทราบพิกัดจุด A และจุด B จะสามารถเขียนเวคเตอร์ที่ผ่านจุดทั้งสองได้

2. <u>กรณีกำหนดมุมให้ 2 มุม</u>



รูปที่ 3 การหาเวคเตอร์หนึ่งหน่วยเมื่อกำหนดมุมที่แรงกระทำกับแกนมาให้

จากรูปที่ 3 การเขียนเวคเตอร์ $\vec{F}$ ให้อยู่ในระบบแกนพิกัดฉาก ทำได้โดยแตกเวคเตอร์ $\vec{F}$ ออกเป็นส่วนประกอบย่อยๆ ดังนี้

1. แตกเวคเตอร์ เป็นส่วนประกอบในแนวดิ่ง และแนวระดับบนระนาบ xy

   ส่วนประกอบในแนวดิ่ง $F_z = F\sin\phi$ (11)

   ส่วนประกอบในแนวระดับ $F_{xy} = F\cos\phi$

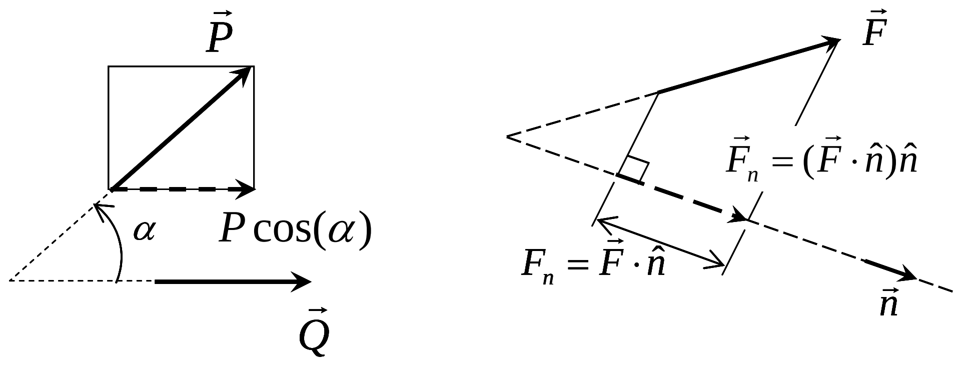
2. แตกส่วนประกอบในแนวระดับ เป็นส่วนประกอบในแนวแกน x, y

   ส่วนประกอบตามแกน x $F_x = F_{xy}\cos\theta = F\cos\phi\cos\theta$ (12)

   ส่วนประกอบตามแกน y $F_y = F_{xy}\sin\theta = F\cos\phi\sin\theta$ (13)

3. แทนส่วนประกอบของเวคเตอร์ตามแกน x, y และ z ในสมการ (11) – (13) ลงในสมการ (3) จะสามารถเขียนเวคเตอร์ ให้อยู่ในระบบแกนพิกัดฉากตามต้องการ

Dot Product



(ก) (ข)

รูปที่ 4 การดอทเวคเตอร์ (Dot product)

นิยามของการดอทเวคเตอร์ $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$ ดังแสดงในรูปที่ 4(ก) แสดงดังสมการ (14) โดย α คือมุมระหว่างเวคเตอร์ $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$ และค่าที่ได้จากการดอทจะเป็น **สเกลาร์**

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos(\alpha) \tag{14}$$

เมื่อทำการจัดรูปสมการ (14) เสียใหม่ จะได้ผลการดอทเวคเตอร์ดังนี้

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = \left(P\cos(\alpha)\right)Q$$

หรือ

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = [\text{ภาพฉายของ } \vec{P} \text{ บน } \vec{Q}](Q) \tag{15}$$

จากสมการ (15) สามารถกล่าวได้ว่า ผลการดอทเวคเตอร์ $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$ คือการนำเอาภาพฉายของ $\vec{P}$ บน $\vec{Q}$ มาคูณด้วยขนาดของเวคเตอร์ $\vec{Q}$ ในทางกลับกัน ก็สามารถกล่าวได้ว่าผลการดอทเวคเตอร์ $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$ คือการนำเอาภาพฉายของ $\vec{Q}$ บน $\vec{P}$ มาคูณด้วยขนาดของเวคเตอร์ $\vec{P}$ ก็ได้

ในกรณีที่เป็นการดอทกันของเวคเตอร์ $\vec{F}$ และ เวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ดังแสดงในรูปที่ 4(ข) ผลการดอทจะได้ดังนี้

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = F(1)\cos(\alpha) = F\cos(\alpha) \tag{16}$$

จากสมการ (16) จะพบว่าการดอทกันของเวคเตอร์ใดๆ กับเวคเตอร์หนึ่งหน่วยนั้น จะได้**ขนาด**ของภาพฉายของเวคเตอร์นั้นๆ บนเวคเตอร์หนึ่งหน่วย (เนื่องจากค่าที่ได้จากการดอทจะเป็น **สเกลาร์**) สำหรับ**เวคเตอร์**ภาพฉายของเวคเตอร์ใดๆ บนเวคเตอร์หนึ่งหน่วยนั้นสามารถหาได้จากสมการ (17)

$$\vec{F}_n = (\vec{F}\cdot\hat{n})\hat{n} \tag{17}$$

คุณสมบัติอื่นๆ ของการดอทเวคเตอร์มีดังนี้

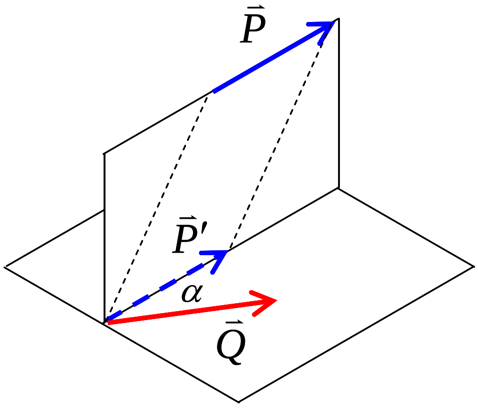
1. เวคเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งมีทิศทางเดียวกันดอทกันมีค่าเท่ากับ 1

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \tag{18}$$

2. เวคเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางตั้งฉากกันดอทกันมีค่าเท่ากับ 0

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{i} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{j} = 0 \tag{19}$$

มุมระหว่างเวคเตอร์



รูปที่ 5 มุมระหว่างเวคเตอร์

เมื่อเวคเตอร์ 2 เวคเตอร์ อยู่ในระนาบเดียวกัน เช่นเวคเตอร์ $\vec{P}'$ และ $\vec{Q}$ ดังแสดงในรูปที่ 5 แล้ว การหามุมระหว่างเวคเตอร์สามารถทำได้ง่ายโดยเลื่อนให้หางของเวคเตอร์ทั้ง 2 มาชนกัน แล้ววัดมุม อย่างไรก็ตามหากเวคเตอร์ทั้งสองอยู่คนละระนาบดังเช่นเวคเตอร์ $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$ แล้ว การหามุมโดยตรงจะทำได้ยาก ในกรณีนี้การหามุมจะทำได้ง่ายขึ้นโดยใช้ผลของการดอทเวคเตอร์

จากนิยามการดอทเวคเตอร์ $$\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos(\alpha) \qquad (14)$$

จะสามารถหามุมระหว่างเวคเตอร์ได้ดังนี้

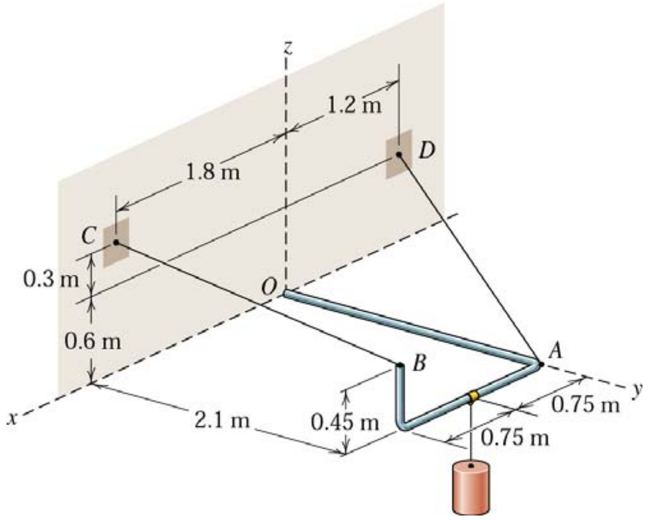
$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{PQ} \qquad (15)$$

ในกรณีที่มีเวคเตอร์หนึ่งเป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยจะได้

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{P} \qquad (16)$$

ถ้าผลของการดอทเวคเตอร์มีค่าเป็น 0 โดยเวคเตอร์ตั้งต้นไม่เท่ากับศูนย์ จากสมการ (14) จะได้ว่ามุมของเวคเตอร์ทั้งสองต้องทำมุมกันเท่ากับ 90°

2/103 The tension in the supporting cable *BC* is 3200 N. Write the force which this cable exerts on the boom *OAB* as a vector **T**. Determine the angle θ_x, θ_y, and θ_z which the line of action of **T** forms with the positive *x*-, *y*-, and *z*-axes.



วิธีทำ เนื่องจากแนวแรง **T** ผ่านจุด *B* และจุด *C* จึงต้องหาพิกัดจุด *B* กับจุด *C* ก่อน

พิกัดจุด *B* : (1.5, 2.1, 0.45)

พิกัดจุด *C* : (1.8, 0, 0.9)

เวคเตอร์ *BC* : $\overrightarrow{BC} = 0.3\hat{i} - 2.1\hat{j} + 0.45\hat{k}$

เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง *BC* :

$$\hat{n}_{BC} = \frac{0.3\hat{i} - 2.1\hat{j} + 0.45\hat{k}}{\sqrt{0.3^2 + 2.1^2 + 0.45^2}} = 0.1383\hat{i} - 0.9684\hat{j} + 0.2075\hat{k}$$

เวคเตอร์ของแรง $\vec{T}$

$$\vec{T}_{BC} = T_{BC}\hat{n}_{BC} = 3200(0.1383\hat{i} - 0.9684\hat{j} + 0.2075\hat{k})$$

$$\vec{T}_{BC} = 442.56\hat{i} - 3098.88\hat{j} + 664.05\hat{k}$$ <u>*Ans*</u>

หามุมที่ทำกับแกน *x*

จาก $[\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\theta]$ $\hat{n}_{BC}\cdot\hat{i} = (1)(1)\cos\theta_x$

$$\cos\theta_x = (0.1383\hat{i} - 0.9684\hat{j} + 0.2075\hat{k})\cdot(\hat{i})$$

$$\cos\theta_x = 0.1383$$

$$\theta_x = 82.05^\circ$$ <u>*Ans*</u>

ทำนองเดียวกัน

หามุมที่ทำกับแกน y

จาก $[\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\theta]$ $\hat{n}_{BC}\cdot\hat{j} = (1)(1)\cos\theta_y$

$$\cos\theta_y = (0.1383\hat{i} - 0.9684\hat{j} + 0.2075\hat{k})\cdot(\hat{j})$$

$$\cos\theta_y = -0.9684$$

$$\theta_y = 165.56^\circ$$

Ans

หามุมที่ทำกับแกน z

จาก $[\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\theta]$ $\hat{n}_{BC}\cdot\hat{k} = (1)(1)\cos\theta_z$

$$\cos\theta_z = (0.1383\hat{i} - 0.9684\hat{j} + 0.2075\hat{k})\cdot(\hat{k})$$

$$\cos\theta_z = 0.2075$$

$$\theta_z = 78.02^\circ$$

Ans

เรียบเรียงจาก "Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version" ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์